UNIVERSITÉ PAUL SABATIER	LICENCE STS

Année universitaire 2009–2010

L1 parcours PC : PHYSIQUE

CONTRÔLE TERMINAL SESSION 1

durée 2 heures

Dans ce texte, les vecteurs sont notés en **gras**.

A. Question de cours : énergie cinétique et mécanique à une dimension

On considère un point matériel A de masse m se déplaçant sur un axe Ox et repéré par la coordonnée x. Ce point est soumis à une force $F(x)$ dirigée suivant Ox et ne dépendant que de la position.

A.1. Écrire l'énergie cinétique du point A.
Correction :
$E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ ou $E_k = \frac{1}{2}mv_A^2$ 1

A.2. Écrire la puissance et le travail de la force **F**.
Correction :
$P = F(x)\dot{x}$ 1
$W = \int F(x)\dot{x}\,\mathrm{d}t$ 1
ou toute autre expression type $\int P\,\mathrm{d}t$ ou $\int F(x)\,\mathrm{d}x$

A.3. Écrire le théorème de l'énergie cinétique pour le point A.
Correction :
$E_{k2} - E_{k1} = \left[W(F)\right]_1^2$ 2
On accepte aussi $\mathrm{d}E_k/\mathrm{d}t = P$ et évidemment les expression équivalentes contenant les expression de P ou W.

A.4. Donner une expression intégrale de l'énergie potentielle du point dans le champ de force $\mathbf{F}(x)$.
Correction :
$E_p(x) = -\int F(x)\,\mathrm{d}x$ 1
Dans le cas général, il n'est pas nécessaire de supposer que $E_p = 0$ à l'infini. Toutefois, on peut accepter toute expression faisant apparaître une intégrale définie

A.5. Écrire le théorème de l'énergie mécanique pour A.
Correction :
énergie mécanique $E_m = E_k + E_p$ 1
$E_{m1} - E_{m2} = 0$ 1
On accepte aussi éventuellement des expressions différentielles et/ou faisant intervenir un travail de forces non conservatives.

B. Exercice : les satellites galiléens de Jupiter

Jupiter a quatre satellites découverts par Galilée en janvier 1610*. Dans cet exercice, on s'intéresse au satellite le plus proche de Jupiter, qui est nommé *Io*. On considère que l'orbite de Io est circulaire et qu'il n'est soumis qu'à l'attraction gravitationnelle de Jupiter. On donne les mesures suivantes :
Masse de Jupiter : $M = 1{,}9 \times 10^{27}$ kg.
Masse de Io : $m = 8{,}9 \times 10^{22}$ kg.
Rayon de l'orbite de Io : $R = 421\ 800$ km.
Constante de gravitation : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2}.

B.1. On considère que le centre de Jupiter est l'origine O d'un repère galiléen. On repère Io par ses coordonnées polaires ρ et φ. Faire un schéma représentant Jupiter et Io et montrant le rayon R de l'orbite. On y fera figurer la base polaire $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi)$.
Correction :
Schéma avec tout ce qui est demandé, soit :
Jupiter (ou O), Io (un point ou une boule...), R et la base 1

B.2. Représenter la force appliquée à Io sur le schéma et donner son expression dans la base $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi)$.
Correction :
Force sur le schéma 0,5
$\mathbf{F} = -(GMm/R^2)\mathbf{e}_\rho$ 1
On accepte aussi des expressions avec des composantes, mais on veut une expression vectorielle (diviser par 2 pour une expression juste non vectorielle).

B.3. Rappeler l'expression des dérivées temporelles de $\mathbf{e}_\rho$ et $\mathbf{e}_\varphi$ dans cette même base.
Correction :
$\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{e}_\rho}{\mathrm{d}t} = \dot\varphi\mathbf{e}_\varphi$ 1
$\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{e}_\varphi}{\mathrm{d}t} = -\dot\varphi\mathbf{e}_\rho$ 1

B.4. En déduire l'expression générale de la vitesse et l'accélération de Io dans cette base (on pourra utiliser le fait que $\rho = R$ est constant, mais on considérera la fonction $\varphi(t)$ comme quelconque).
Correction :
$\mathbf{v} = R\dot\varphi\mathbf{e}_\varphi$ 1
$\mathbf{a} = R\ddot\varphi\mathbf{e}_\varphi - R\dot\varphi^2\mathbf{e}_\rho$ 1

B.5. Projeter la deuxième loi de Newton sur $\mathbf{e}_\rho$. En déduire la période de révolution T en fonction de G, R et M.
Correction :
$-mR\dot\varphi^2 = -GMm/R^2$ 1
$T = 2\pi/\dot\varphi$ ou équivalent 1
$T = 2\pi\sqrt{R^3/GM}$ ou équivalent 1

B.6. Calculer numériquement la période T et la comparer à la valeur mesurée qui est de $1{,}769$ jours. Que pensez-vous de l'accord ou du désaccord entre la valeur calculée et la mesure expérimentale ?
Correction :
$T = 1{,}53 \times 10^5$ s$=1,766$ j $1 + 0{,}5$

*Galilée en a fait le récit dans un petit opuscule intitulé *Le messager des étoiles* (traduction du Latin) publié en mars de la même année, et disponible en Français dans la collection *Points Sciences* au Seuil

On ne peut pas avoir une précision meilleure que les 2 premiers chiffres, car la masse de Jupiter n'est connue qu'avec 2 chiffres. Le bon résultat n'est donc qu'une coïncidence...
Tout commentaire pertinent 1

C. Problème : un modèle simplifié du bouchon du pêcheur : oscillations d'un bloc à la surface de l'eau

On considère un bloc solide homogène cylindrique, dont la surface de base est S, la hauteur h et la masse volumique ρ_0. Ce bloc flotte à la surface de l'eau de masse volumique ρ_e (on a donc $\rho_0 < \rho_e$). Le bloc est maintenu vertical à l'aide d'un dispositif adapté (plombs sur la ligne) ; plus précisément l'axe du cylindre est perpendiculaire à la surface de l'eau, voir figure 1. À l'équilibre, le bouchon est enfoncé d'une hauteur h_0, alors que la hauteur totale est notée h. En plus du poids et de

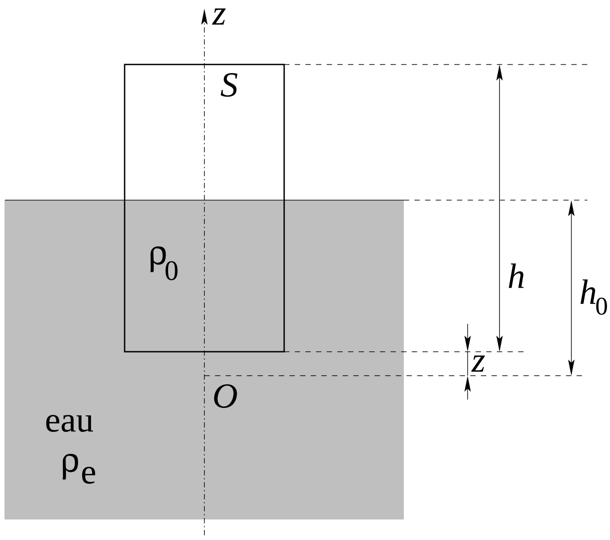

FIG. 1 – Schéma du dispositif

la force d'Archimède, le bouchon est soumis à une force de frottement fluide $\mathbf{F}_f = -\alpha\mathbf{v}$ où $\mathbf{v}$ est sa vitesse. D'autre part, le bouchon est aussi soumis à une force proportionnelle à son accélération $\mathbf{a}$, notée $\mathbf{F}_a = -m_a\mathbf{a}$. Cette force est négligeable quand la densité du fluide est petite par rapport à celle de l'objet qui s'y déplace, mais ne peut pas être négligée ici, puisque le fluide est plus dense que le bouchon. Elle provient de ce que, pour accélérer le bouchon, il est nécessaire d'accélérer l'eau qui l'entoure (il n'est pas nécessaire de comprendre ce phénomène en détail pour faire le problème...).

On étudie dans un premier temps le mouvement du bouchon seul. On verra dans la partie II ce qui arrive s'il y a des vagues à la surface de l'eau.

C.I. Etude du mouvement du bouchon seul

On note z la position du bas du bouchon, mesurée par rapport au point O. Le point O est choisi tel que $z = 0$ quand le niveau de l'eau n'est pas agité et que le bouchon est à l'équilibre.

C.I.1. La dimension « longueur » est notée L, celle de la masse est notée M et celle du temps est notée T. Quelles sont les dimensions et les unités SI de α et m_a ?
Correction :

$[\alpha] = MT^{-1}$, unité kg.s^{-1} 0,5
$[m_a] = M$, unité kg 0,5

C.I.2. Dans cette question, on calcule la masse du bouchon et la force d'Archimède qui lui est appliquée.

a. Écrire le volume du cylindre et en déduire sa masse, que l'on notera m_c.
Correction :
$V = Sh$ 0,5
$m_c = \rho_0 hS$ 0,5

b. Écrire le volume V_i de la partie immergée du bloc pour un z quelconque inférieur à h_0.
Correction :
$V_i = S(h_0 - z)$ 0,5

c. En déduire la force d'Archimède $\mathbf{F}_p$ (notée ainsi car c'est une force due à la pression de l'eau) subie par le bouchon (on ne comptera que la force d'archimède due à l'eau, et on négligera celle due à l'air).
Correction :
$\mathbf{F}_p = -\rho_e S(h_0 - z)\mathbf{g}$ ou toute expression équivalente 1

C.I.3. Faire le bilan des forces et écrire la deuxième loi de Newton pour le mouvement du bouchon. On la projettera sur l'axe Oz.
Correction :
Poids, force d'Archimède, force de frottement et $\mathbf{F}_a$ $4 \times 0{,}5$
$m_c\ddot{z} = \rho_e S(h_0 - z)g - m_a\ddot{z} - \alpha\dot{z} - m_c g$ 1

C.I.4. Dans cette question, on établit l'équation différentielle à résoudre pour étudier le mouvement.

a. Écrire l'équation pour l'équilibre et en déduire une relation liant h, h_0, ρ_0 et ρ_e.
Correction :
On a $z = 0$, $\dot{z} = 0$ et $\ddot{z} = 0$, donc $\rho_e S h_0 - m_c g = 0$ $0,5 + 0,5$
soit $\rho_e h_0 = \rho_0 h$ 1

b. En déduire que l'équation du mouvement se met sous la forme :

$$\ddot{z} + \frac{1}{\tau}\dot{z} + \omega^2 z = 0 \qquad (1)$$

et donner les expressions de τ et ω.
Correction :
$1/\tau = \alpha/(m_c + m_a)$ 1
$\omega = \sqrt{\rho_e S g/(m_c + m_a)}$ 1

c. On donne $S = 3$ cm^2, $\alpha = 1{,}8 \times 10^{-2}$ SI, $g = 9{,}81$ N.kg^{-1}, $\rho_e = 10^3$ kg.m^{-3}, $\rho_0 = 0{,}5 \times 10^3$ kg.m^{-3}, $h = 6$ cm, $m_a = 4{,}5$ g. Calculer h_0, τ et ω.
Correction :
$h_0 = \rho_0 h/\rho_e = 3$ cm 0,5
$\tau = (m_c + m_a)/\alpha = 13{,}5 \times 10^{-3}/1{,}8 \times 10^{-2} = 0{,}75$ s 1
$\omega = \sqrt{2943/13{,}5} = 14,7$ rd.s^{-1} 1
On attend que l'unité soit indiquée et correcte (sinon moitié des points)

C.I.5. Dans cette question, on étudie le mouvement du bouchon.

a. Calculer la solution générale de l'équation (1). On utilisera le fait que τ est de l'ordre d'une seconde et ω est de l'ordre d'une dizaine de radians par seconde.
Correction :

On demande le calcul, c.-à-d. équation caractéristique, solution de cette équation pour l'amortissement faible et forme de la solution générale. On acceptera l'approximation $\sqrt{-\Delta} = \omega$, mais toute autre notation ($\Omega, \dots$) sera bien sûr considérée comme bonne.
L'ensemble : 1+1+1

b. On suppose que le bouchon est à sa position d'équilibre avec une vitesse initiale vers le bas de $v_0 = 0.5$ m.s^{-1} (par exemple à la suite d'une « chute » dans l'air quand le pêcheur lance sa ligne). Donner l'expression de la solution correspondante.
Correction :
Le plus facile est de travailler à partir de l'équation $z(t) = \exp(-t/2\tau)[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]$.
La condition sur la position d'équilibre donne $A = 0$: 1
La condition sur la vitesse donne $B = -v_0/\omega$: 1

c. Représenter l'allure de la solution sur un graphe.
Correction :
On ne demande pas de valeurs numériques, mais on peut compter :
nom de la variable sur les axes : 0,5
forme de l'enveloppe : 0,5
oscillations avec démarrage en zéro : 0,5
démarrage vers le bas : 0,5

C.II. Oscillations du bouchon dues aux vagues

On considère maintenant que la surface de l'eau a un mouvement oscillant donné par un niveau $n(t) = h_0 + n_0\cos(\omega_e t)$ (on compte le niveau par rapport à l'origine O définie au début de la question I).

C.II.1 Écrire la nouvelle expression de la force d'Archimède.
Correction :
Le volume immergé est maintenant donné par $S(n(t) - z)$. On a donc :
$\mathbf{F}_p = -\rho_e S(n(t) - z)\mathbf{g}$ ou toute expression équivalente 1
On admettra en particulier la projection sur Oz, $F_p = \rho_e S(n(t) - z)g$.

C.II.2 En déduire que l'équation est maintenant de la forme :

$$\ddot{z} + \frac{1}{\tau}\dot{z} + \omega^2 z = a\cos(\omega_e t) \qquad (2)$$

et donner l'expression de a.
Correction :
$a = \rho_e S n_0 g/(m_c + m_a)$ 1

C.II.3 On cherche une solution particulière de l'équation (2) de la forme $z = b\cos(\omega_e t + \varphi)$, et on utilise la notation complexe :

a. Écrire la notation complexe $\underline{z}(t)$ associée à la forme de $z(t)$ donnée ci-dessus. On introduira l'amplitude complexe $\underline{Z}$ associée et on donnera son expression en fonction de b et φ.
Correction :
$\underline{z}(t) = \underline{Z}\exp(i\omega_e t)$ 0,5
$\underline{Z} = b\exp(i\varphi)$ 0,5
On admettra toute combinaison sensée des précédentes formules...

b. Écrire l'équation différentielle pour $\underline{z}(t)$.
Correction :
$\ddot{\underline{z}} + \frac{1}{\tau}\dot{\underline{z}} + \omega^2\underline{z} = a\exp(i\omega_e t)$ 1

c. En déduire la valeur de $\underline{Z}$, ainsi que l'amplitude b.
Correction :

$$\underline{Z} = \frac{a}{(\omega^2 - \omega_e^2) + i\omega_e/\tau} \qquad 1$$

$$b = |\underline{Z}| = \frac{a}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_e^2)^2 + \omega_e^2/\tau^2}} \qquad 1$$